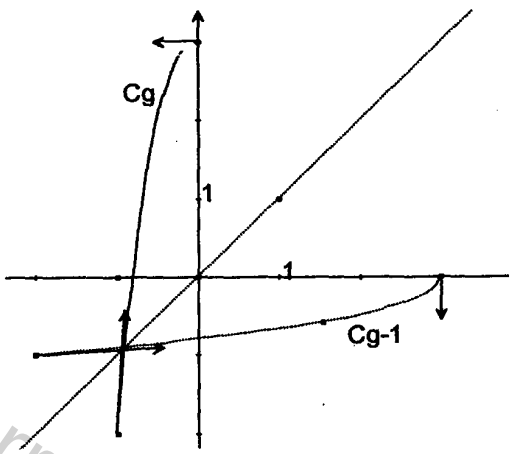
une bijection alors L'équation g $(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 \in]-1, 0[$

d) $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{g'\left[(g^{-1})(0)\right]} = \dfrac{1}{g'(x_0)} = \dfrac{1}{6x_0^2 - 6x_0}$

e)



Exercice n° 18

● $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (à rectefier)

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
x	−		0	+	+	
$1-x$	+		+		0	−
$\dfrac{x}{1-x}$	−		0	+	‖	−

D'après le tableau de signe : Df = [0 , 1[

f est dérivable sur] 0 , 1[et on a :

$$f'(x) = \frac{(\frac{x}{1-x})'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} > 0$$

• T de variation de f

x	0		1
$f'(x)$	‖	+	‖
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1}{0^+}} = +\infty$$

● a) f est continue et strictement croissante sur [0 , 1[

d'où f réalise une bijection de[0 , 1[sur [0 , $+\infty$ |

d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} definie sur [0 , $+\infty$ [

b) • $(f^{-1})(1) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}} = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{(f^{-1})(1) = \dfrac{1}{2}}$

• $(f^{-1})(2) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}} = 2 \Leftrightarrow 5\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4}{5}$ donc $\boxed{(f^{-1})(2) = \dfrac{4}{5}}$

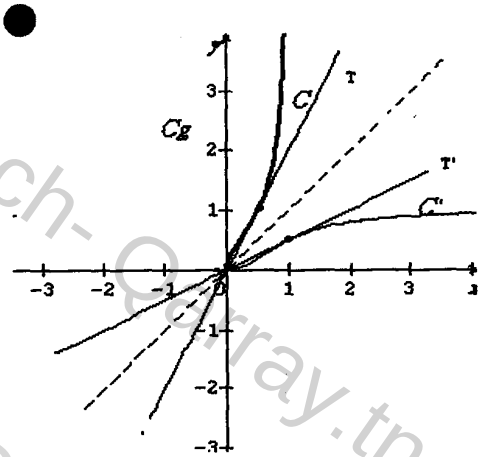
c) * On a $(f^{-1})(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(\dfrac{1}{2}) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(1)\right]} = \dfrac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2}$

* On a $(f^{-1})(2) = \dfrac{4}{5}$ et $f'(\dfrac{4}{5}) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(2)\right]} = \dfrac{1}{f'(\frac{4}{5})} = \dfrac{4}{25}$

d) T : $y = f'(0.5)(x - 0.5) + f(0.5) = 2x$

e) T' : $y = (f^{-1})'(1)(x - 1) + (f^{-1})(1) = \dfrac{1}{2}x$

●



4) $y \in [0, 1[$, $x \in [0, +\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, cherchons donc y

$$f(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = x^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - yx^2 \Leftrightarrow y(1 + x^2) = x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn